Probabilidade

Probabilidade é um número que tenta expressar a chance de algum determinado fenômeno acontecer. Este número varia no intervalo [0,1] e pode ser expresso na forma decimal bem como na forma de fração ou de porcentagem, exemplo:

$$P = 0,6 = 3/5 = 60\%$$

Não se deve tomar o valor da probabilidade de um determinado evento como garantia do que aconteceu ou do que acontecerá. É incorreto pensar que em quatro lançamentos de uma moeda os resultados serão obrigatoriamente: duas caras e duas coroas, só porque a probabilidade de se obter cara é igual a de se obter coroa: 50%.

Deve-se considerar o fato de que a moeda possa ser ligeiramente mais pesada de um lado do que do outro, o que é fisicamente mais provável do que a existência de uma moeda perfeitamente equilibrada. E mesmo se tratando de uma moeda assim, a hipotese de se obter 4 caras em 4 lançamentos tem uma probabilidade de 6,25%.

Equiprobabilidade

Supondo a existência de uma moeda perfeitamente honesta, admitimos que em cada lançamento a probabilidade de se obter cara seja igual a probabilidade de se obter coroa. Nestas condições dizemos que o universo das consequências possíveis do lançamento dessa moeda representado pelo conjunto {cara, coroa} é equiprovável.

Os subconjuntos de um universo ou espaço amostral são chamados de eventos, e neste caso, os eventos unitários são os subconjuntos {cara) e {coroa} que podem ser designados diretamente pelo seu único elemento.

Então se essa moeda é perfeitamente honesta temos que: P = P(cara) = P(coroa) = ½ = 50%.

A probabilidade de um evento unitário num universo equiprovavel de **n** elementos distintos é: $P = \frac{1}{n}$.

Probabilidade de um evento não unitário de espaço amostral equiprovável

No lançamento de um dado honesto com as faces numeradas de 1 a 6, considere os seguintes eventos não unitários do espaço amostral **U = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }**:

$A = \{x \in U | x \text{ é par}\} = \{2, 4, 6\}$ $\quad$ $C = \{x \in U | x < 0\} = \{\ \} = \varnothing$

$B = \{x \in U | x \geq 5\} = \{5, 6\}$ $\quad$ $D = \{x \in U | x \text{ é inteiro}\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \mathbf{U}$

Define-se a probabilidade de um evento X, unitário ou não, de um espaço amostral U equiprovável e não vazio, como sendo o quociente entre o número de elementos distintos de X e o número de elementos distintos de U, ou seja:

$$P(X) = \frac{n(X)}{n(U)}$$

No exemplo acima temos que **n(U) = 6**, n(A) = 3, n(B) = 2, n(C) = 0 e n(D) = 6. Assim, no lançamento desse dado honesto, a probabilidade de se obter um número par é meio, a de se obter um número maior ou igual a cinco é um terço, de se obter um número negativo é zero e de se obter um número inteiro é um.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\% \qquad P(C) = \frac{n(C)}{n(U)} = \frac{0}{6} = 0 = 0\%$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0,\bar{3} \approx 33,33\% \qquad P(D) = \frac{n(D)}{n(U)} = \frac{6}{6} = 1 = 100\%$$

Na expressão $P(X) = \dfrac{n(X)}{n(U)}$, alguns chamam o numerador n(X) de número de casos favoráveis e o denominador n(U) de número total de casos possíveis, afinal, é exatamente isso que a probabilidade pretende exprimir. Mas se não for verificada a equiprobabilidade do espaço amostral U, diversos erros podem ser cometidos. Veja:

– Vai chover amanhã?
– Ora só há duas opções: a de chover e a de não chover. Portanto a probabilidade de chuva amanhã é igual a ½, ou seja: 50%.

Desta forma, a probabilidade de qualquer acontecimento seira de 50%, pois afinal, as coisas acontecem ou não acontecem, não havendo uma terceira opção.

O que exclui esta falácia no estudo da probabilidade é o fato de que o universo dos possíveis eventos futuros representado pelo espaço amostral {chover, não chover} não é equiprovável. Entretanto há uma prorpiedade matemática que pode ser tirada de um espaço amostral como este:

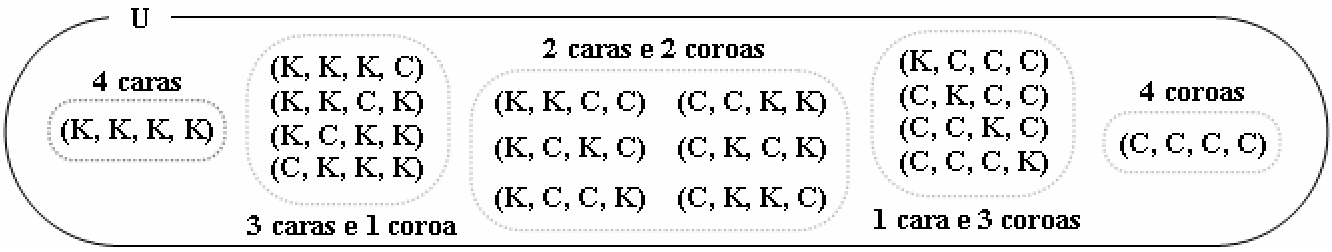
Seja **P(C)** a probabilidade de chover num certo dia, indicamos por $P(\overline{C})$ a probabilidade de não chover neste mesmo dia, e temos que: $P(C) + P(\overline{C}) = 100\%$, não importa qual seja a probabilidade **P(C)**.

Outro erro, bem mais sutil que este, pode ser cometido quando são considerados espaços amostrais de fenômenos consecutivos, como por exemplo, o universo dos resultados dos lançamentos de quatro moedas honestas.

Neste caso, o universo U = {4 caras, 3 caras e 1 coroa, 2 caras e 2 coroas, 1 cara e 3 coroas, 4 coroas} não é equiprovável, pois há mais de uma maneira de se obter uma cara e três coroas, ao passo que há apenas uma maneira de se obter 4 coroas.

Pode-se evitar este erro considerando que cada elemento do universo sejam as possíveis seqüências dos resultados obtidos dessas moedas como se elas tivessem sido laçadas uma de cada vez, mesmo que elas tenham sido lançadas simultaneamente. Para compreender melhor esta situação, lance quatro moedas de diferentes valores monetários e verifique que há maneiras diferentes de se obter, por exemplo, duas caras e duas coroas.

O diagrama a seguir, em que **K** significa cara e **C** significa coroa, é uma representação do universo equiprovável para os possíveis resultados do lançamento de quatro moedas honestas:



Dessa forma, observa-se que os eventos “4 caras” e “4 coroas” são subconjuntos unitários de **U**, mas que os eventos “3 caras e 1 coroa”, “2 caras e 2 coroas” e “1 cara e 3 coroas” não são subconjuntos unitários de **U**, pois apresentam respectivamente 4, 6 e 4 elementos.

Assim, no lançamento de quatro moedas honestas tem-se **n(U) = 32** e pode-se, por exemplo, concluir que:

- A probabilidade de se obter quatro caras é $\frac{1}{32} = 3{,}125\%$.
- A probabilidade de se obter três caras e uma coroa é $\frac{4}{32} = \frac{1}{8} = 12{,}5\%$.
- A probabilidade de se obter duas caras e duas coroas é $\frac{6}{32} = \frac{3}{16} = 18{,}75\%$.

Probabilidade condicional

Num espaço amostral **U**, equiporovavel ou não, são válidas as seguintes propriedades sobre a probabilidade de um certo evento **X** deste espaço:

$$0 \le P(X) \le 1 \qquad P(\varnothing) = 0 \qquad P(U) = 1 \qquad P(X) + P(\overline{X}) = 1$$

Além disso, se **U** é equiprovável, então a probabilidade condicional de ocorrer um de seus eventos **X** dado que ocorreu outro evento **Y** não vazio, é expressa por: $P(X / Y) = \dfrac{n(X \cap Y)}{n(Y)}$.

Eventos independentes

O evento **X** de um espaço amostral **U** é independente do evento **Y** se, e somente se, $P(X / Y) = P(X)$.

Se **U** é um espaço amostral equiprovavel que contém os eventos **X** e **Y**, e **X** é independente de **Y**, então podemos demonstrar que **Y** tambem é independente de **X**, pois a intersecção de conjuntos é uma operação comutativa:

$$P(X / Y) = P(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n(X \cap Y)}{n(Y)} = \frac{n(X)}{n(U)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n(Y \cap X)}{n(X)} = \frac{n(Y)}{n(U)} \quad \Leftrightarrow \quad P(Y / X) = P(Y)$$

Eventos mutuamente exclusivos

Dizemos que os evento **X** e **Y** de um espaço amostral **U** são mutuamente exclusivos se, e somente se, um deles não pode ocorrer quando ocorre o outro. Ou seja: $P(X / Y) = P(Y / X) = 0$.

Alguns enunciados omitem a o termo "mutuamente", dizendo apenas que os eventos **X** e **Y** são exclusivos.

Isto acontece apenas se os conjuntos **X** e **Y** são disjuntos, ou seja, se $X \cap Y = \varnothing$.

Probabilidade da intersecção de eventos (Teorema de Beyes)

Indicamos por $P(X \cap Y)$ a probabilidade de ocorrerem simultâneamente o evento **X** e o evento **Y** de um mesmo espaço amostral **U**, assim, num espaço amostral equiporovável e não vazio, temos que:

$$P(Y / X) = \frac{n(X \cap Y)}{n(X)} \quad \Rightarrow \quad n(X \cap Y) = n(X) \cdot P(Y / X) \quad \Rightarrow \quad \frac{n(X \cap Y)}{n(U)} = \frac{n(X)}{n(U)} \cdot P(Y / X)$$

Assim, temos que $P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y / X)$, e como $X \cap Y = Y \cap X$, temos que:

$$P(X) \cdot P(Y / X) = P(Y) \cdot P(X / Y)$$

Desta expressão vem o teorema de Beyes para dois eventos não vazios:

$$\frac{P(X)}{P(Y)} = \frac{P(X / Y)}{P(Y / X)}$$

Probabilidade da união de eventos

Indicamos por **$P(X \cup Y)$** a probabilidade de ocorrer o evento **X** ou o evento **Y** de um mesmo espaço amostral. Se este espaço amostral for equiporovável e não vazio podemos garantir que:

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$$

Note que a a probabilidade da união de eventos depende tanto da probabilidade de cada evento quanto da propbabilidade da intersecção desses eventos, que pode sempre ser calculada pelo teorema de Beyes: $P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y / X)$ ou $P(X \cap Y) = P(Y) \cdot P(X / Y)$. Portanto:

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X) \cdot P(Y / X)$$

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(Y) \cdot P(X / Y)$$

Particularmente, se os eventos X e Y forem independentes no espaço amostral considerado, então o cálculo fica um pouco mais simples, pois netste caso temos: $P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y)$ e, portanto:

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X) \cdot P(Y)$$

E ainda, se os eventos X e Y forem mutuamente exclusivos, então: $P(X \cap Y) = 0$, e portanto:

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y)$$

Probabilidade de uma sucessão de eventos

Seja **X** um evento não vazio de um espaço amostral **U** das consequências de um fenômeno que pode suceder-se indefinidamente de maneira independente, como o lançamento de uma moeda ou o lancamento de um dado com as faces numeradas de 1 a 6.

Neste caso, se forem feitos **n** lançamentos, a probabilidade de ocorrer o evento **X** um número **p** de vezes em que **$p \le n$** é dada pela expressão: $\binom{n}{p} \cdot P(X)^p \cdot P(\overline{X})^{n-p}$, em que $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$.

Assim, se fizermos quatro lançamentos de uma moeda honesta, a probabilidade de obtermos cara em dois dos quatro lançamentos é: $P = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8} = \mathbf{37{,}5\%}$.

Da mesma forma, se fizermos cinco lançamentos de um dado, a probabilidade de obtermos o número maior que quatro em três destes lançamentos é: $P = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^2 = 10 \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{4}{9} = \frac{40}{243} \approx \mathbf{16{,}46\%}$.